PART2　3 次関数のグラフと x 軸の間の面積

2　曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

3 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求め，グラフと x 軸の上下関係を調べ，面積を求める。

第18講　PART2　確認問題

1　曲線 $y=-x^3+6x^2+4x-24$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

アイウ

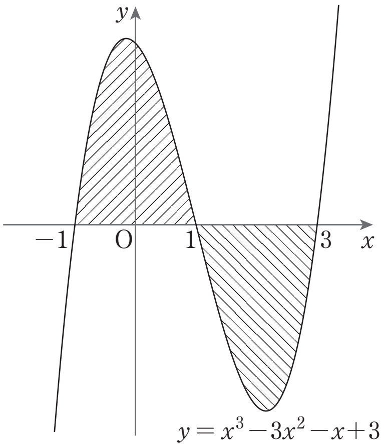
PART2　3次関数のグラフと x 軸の間の面積

2　曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^3-3x^2-x+3=0 \qquad (x+1)(x-1)(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 1,\ 3$$

右図より，求める面積は



$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx-\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx-\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx$$

$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_1^3$$

$$=2(-1+3)-\left\{\frac{1}{4}(81-1)-(27-1)-\frac{1}{2}(9-1)+3(3-1)\right\}$$

$$=4+4=8$$

（面積を求める計算の別解）

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-x+3&=(x+1)(x-1)(x-3)\\&=\{(x-1)+2\}(x-1)\{(x-1)-2\}\\&=(x-1)\{(x-1)^2-4\}\\&=(x-1)^3-4(x-1)\end{aligned}$$

求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(x-1)^3-4(x-1)\}dx-\int_{1}^{3}\{(x-1)^3-4(x-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-2(x-1)^2\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-2(x-1)^2\right]_1^3$$

$$=-\left\{\frac{1}{4}(-1-1)^4-2(-1-1)^2\right\}-\left\{\frac{1}{4}(3-1)^4-2(3-1)^2\right\}$$

$$=4+4=8$$

第18講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイウ：128

[解説]

曲線 $y=-x^3+6x^2+4x-24$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^3+6x^2+4x-24=0$$

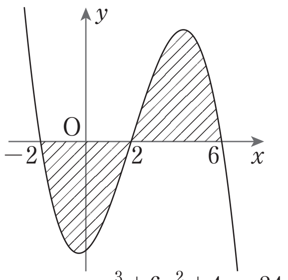
$$x^3-6x^2-4x+24=0$$

$$(x-2)(x^2-4x-12)=0$$

$$(x-2)(x+2)(x-6)=0$$

よって

$$x=-2,\ 2,\ 6$$



右図より，求める面積は

$$-\int_{-2}^{2}(-x^3+6x^2+4x-24)dx$$

$$+\int_{2}^{6}(-x^3+6x^2+4x-24)dx \quad \text{[A]}$$

$$=-2\int_{0}^{2}(6x^2-24)dx \quad \text{[B]}$$

$$+\int_{2}^{6}(-x^3+6x^2+4x-24)dx$$

$$=-2\Big[2x^3-24x\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{4}x^4+2x^3+2x^2-24x\Big]_2^6$$

$$=-2(2\cdot2^3-24\cdot2)-\frac{1}{4}(6^4-2^4)+2(6^3-2^3)$$

$$+2(6^2-2^2)-24(6-2)$$

$$=\mathbf{128}$$

[A]　曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において

つねに $f(x)\geqq0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

つねに $f(x)\leqq0$ のとき

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

[B]

n が奇数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

（面積を求める計算の別解）

$$-x^3+6x^2+4x-24$$
$$=-(x+2)(x-2)(x-6)$$
$$=-\{(x-2)+4\}(x-2)\{(x-2)-4\}$$
$$=-(x-2)\{(x-2)^2-16\}$$
$$=-(x-2)^3+16(x-2)$$

求める面積は

$$-\int_{-2}^{2}\{-(x-2)^3+16(x-2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{6}\{-(x-2)^3+16(x-2)\}dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{4}(x-2)^4+8(x-2)^2\right]_{-2}^{2}$$ [C]
$$+\left[-\frac{1}{4}(x-2)^4+8(x-2)^2\right]_{2}^{6}$$
$$=-\frac{1}{4}(-2-2)^4+8(-2-2)^2$$
$$-\frac{1}{4}(6-2)^4+8(6-2)^2$$
$$=\mathbf{128}$$

［C］　積分の公式

$$\int(x-\alpha)^n dx$$
$$=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$$ （C は定数）